Analiza w przestrzeniach L_p
Lista 3

Zad 1. Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. *Półnormą* na X nazywamy funkcję $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ taką, że dla każdego $\lambda \in \mathbb{K}$ i $x, y \in X$ zachodzi

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \qquad \text{oraz} \qquad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Pokazać, że $N := \{x \in X : \|x\| = 0\}$ jest podprzestrzenią liniową X, a wzór $\|[x]\| := \|x\|$, gdzie $[x]$ oznacza warstwę elementu x, wyznacza normę na przestrzeni ilorazowej X/N.

Zad 2. Niech (Ω, Σ, μ) będzie przestrzenią z miarą. Niech $p \geq 1$. Pokazać, że wzór $\left(\int_\Omega |x|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$ definiuje półnormę na przestrzeni $\mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ funkcji całkowalnych w p-tej potędze.

Zad 3. Pokazać, że ciąg Cauchy jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy posiada podciąg zbieżny.

Zad 4. Udowodnić, że przestrzeń ilorazowa $L_p(\Omega, \Sigma, \mu) := \mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)/\mathcal{L}_0(\Omega, \Sigma, \mu)$, gdzie $\mathcal{L}_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ oznacza zbiór funkcji mierzalnych równych zero μ-prawie wszędzie, wraz z funkcją $\|[x]\|_p = \left(\int_\Omega |x|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$ gdzie $[x] = x + \mathcal{L}_0(\Omega, \Sigma, \mu)$[1] jest przestrzenią unormowaną zupełną.

Zad 5. Niech (Ω, Σ, μ) będzie przestrzenia z miarą. Pokazać, że zachodzi równość

$$\inf\{K > 0 : |x(t)| \leq K \text{ dla } \mu\text{-prawie wszystkich } t \in \Omega\} = \inf_{A \in \Sigma,\, \mu(A)=0} \sup_{t \in \Omega \setminus A} |x(t)|.$$

Wspólną wartość oznaczamy przez $\sup\operatorname{ess}_{t\in\Omega} |x(t)|$ i nazywamy *supremum istotnym* funkcji x.

Zad 6. Pokazać, że supremum istotne $\|x\|_\infty = \sup\operatorname{ess}_{t\in\Omega} |x(t)|$ jest półnormą na przestrzeni funkcji istotnie ograniczonych $\mathcal{L}_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. Udowodnić, że wraz z normą indukowaną przestrzeń ilorazowa $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu) := \mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)/\mathcal{L}_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ jest zupełna.

Zad 7. Wyznaczyć odległość wektorów x, y w przestrzeni X, gdzie :

a)	$X = L_\infty[-1, 1]$	$x(t) = 1 - t$	$y(t) = 1 + t$	c)	$X = L_2[0, 1]$	$x(t) = t$	$y(t) = t^2$
b)	$X = L_\pi[0, 1]$	$x(t) = \sqrt{t}$	$y(t) = \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$	d)	$X = L_1[-\pi, \pi]$	$x(t) = 1$	$y(t) = \sin t$

Zad 8. Zbadać w przestrzeni $L_2[0, 1]$ zbieżność ciągu $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, gdzie: a) $x_n(t) = \sqrt[n]{t}$, b) $x_n(t) = t^n$.

Zad 9. Sprawdzić, czy podzbiór $M = \{x \in L_1[0, 1] : x \text{ ciągła oraz } \max_{t\in[0,1]} |x(t)| < 1\}$ przestrzeni $L_1[0, 1]$ jest otwarty, domknięty lub ograniczony.

Zad 10. Niech (Ω, Σ, μ) przestrzeń z miarą skończoną. Pokazać, że dla dowolnych $0 < p < q < \infty$ zachodzą inkluzje

$$L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu) \subseteq L_q(\Omega, \Sigma, \mu) \subseteq L_p(\Omega, \Sigma, \mu).$$

Zad 11. Wykazać, że ciąg $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ zbieżny do x w $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ jest zbieżny do x według miary, ale implikacja odwrotna na ogół nie istnieje.

Zad 12. Niech $p \geq 1$. Podać przykład ciągu $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq L_p[0, 1]$

a) zbieżnego punktowo do zera, ale niezbieżnego w przestrzeni $L_p[0, 1]$

b) zbieżnego do zera w przestrzeni $L_p[0, 1]$, ale niezbieżnego punktowo.

[1] używając skrótu myślowego zwyczajowo pisze się (nieściśle) $[x] = x$